12. Abelovu cenu za matematiku získal v roce 2014 Jakov G. Sinaj

Michal Křížek

12.1 Prolog

Dne 26. března 2014 oznámil předseda Norské akademie věd Nils Christian Stenseth, že Abelovu cenu za rok 2014 získá ruský matematik prof. Jakov G. Sinaj za své *fundamentální příspěvky k teorii dynamických systémů, ergodické teorii a matematické fyzice.*

Jakov G. Sinaj

V pondělí 19. května 2014 se J. Sinaj nejprve zúčastnil kladení květin a věnců u památníku Nielse Henrika Abela v královské zahradě v Oslu (viz obr. 12.1). Následující den pak laureát převzal Abelovu cenu v hlavní aule univerzity v Oslu. Večer pak Norská akademie věd uspořádala slavnostní banket na počet prof. Sinaje na zámku Akershus.

Dne 21. května J. Sinaj proslovil na univerzitě v Oslu odbornou laureátskou přednášku *Now everything has been started? The origin of deterministic chaos.* Poté následovaly tři abelovské přednášky shrnující laureátovo dílo. První proslovil Gregory Marguli, nositel Fieldsovy medaile, na téma *Kolmogorov–Sinai entropy and homogeneous dynamics.* Jako druhý vystoupil Konstantin M. Chanin s přednáškou *Between mathematics and physics.* Ve třetí přednášce *Mathematical billiards and chaos* se Domokos Szász pokusil odpovědět na otázku, zda může náhodné chování vzniknout v čistě deterministických systémech. O den později pronesl prof. Sinaj ještě další přednášku popularizující matematiku pro studenty na univerzitě ve Stavangeru.

Profesor Sinaj je uznávanou osobností jak mezi matematiky, tak mezi fyziky. Pracuje v Matematickém ústavu na univerzitě v Princetonu a Landauově ústavu pro teoretickou fyziku Ruské akademie věd. Není proto divu, že je autorem stimulujícího článku *Mathematicians and physicists = Cats and dogs?* [14], v jehož závěru se svěřuje: *Obvykle fyzikům nedůvěřuji, dokud nenaleznu svůj vlastní důkaz nebo alespoň objasnění jejich výsledků.*

Jakov Sinaj získal Abelovu cenu mj. za práce svazující teorii deterministických dynamických systémů s teorií stochastických systémů. Je po něm pojmenována celá řada matematických pojmů, např. Kolmogorovova–Sinajova entropie, Sinajův kulečník (billiards), Sinajova náhodná procházka, Sinajova–Ruelleova–Bowenova míra či Pirogovova–Sinajova teorie.

12.2 Stručný životopis

Jakov Grigorjevič Sinaj se narodil 21. září 1935. Oba jeho rodiče byli mikrobiologové. Dědeček z matčiny strany, matematik Veniamin Fjodorovič Kagan, byl vedoucím oddělení diferenciální geometrie na Moskevské státní univerzitě (MGU) a hodně se svému vnuku Jakovovi věnoval.

Obr. 12.1 Socha Nielse Henrika Abela v Oslu (foto J. E. Vatne)

Jakov Sinaj začal studovat v roce 1952 na Fakultě mechaniky a matematiky MGU. V roce 1957 úspěšně zakončil studium, v roce 1960 získal vědecký titul kandidáta věd a o tři roky později i velký doktorát. Jeho školitelem byl slavný ruský matematik Andrej Nikolajevič Kolmogorov. Na MGU se J. Sinaj aktivně účastnil semináře o ergodické teorii.

Již v roce 1962 měl Sinaj zvanou přednášku na Mezinárodním kongresu matematiků ve Stockholmu (celkem přednášel na těchto kongresech čtyřikrát). V letech 1960–1971 působil jako vědecký pracovník v laboratoři pravděpodobnostních a statistických metod MGU. Poté se stal profesorem na MGU a vedoucím vědeckým pracovníkem v Landauově ústavu teoretické fyziky Ruské akademie věd. Tento ústav byl založen v roce 1964 ve městě Černogolovka asi 40 km severně od Moskvy.

Profesor Sinaj vyškolil více než 50 Ph.D. studentů. Je velice respektovaným pedagogem na univerzitě v Princetonu. Jeden z jeho studentů o něm prohlásil: *Být v jeho třídě je velice inspirativní … Přítomní cítí okamžitou potřebu vstoupit do děje — vyzařuje z něj hmatatelné nadšení, které nás inspiruje.*

V roce 1997 byl Jakov Sinaj oceněn prestižní Wolfovou cenou. V letech 1997–1998 působil na Princetonské univerzitě a v roce 2005 nastoupil na Kalifornský technologický ústav v Pasadeně. V roce 2001 byl zvolen předsedou výboru Mezinárodní matematické unie, který uděloval Fieldsovy medaile další rok na kongresu v Pekingu. V roce 2002 mu byla udělena Nemmersova cena za matematiku. Během života získal mnoho dalších ocenění, např. Diracovu medaili či Boltzmannovu zlatou medaili. Čestný doktorát mu udělila Varšavská univerzita (1993), Budapešťská univerzita (2002), Hebrejská univerzita v Jeruzalémě (2005) a univerzita ve Warwicku (2010). Profesor Sinaj byl zvolen členem, popř. čestným členem mnoha akademií a vědeckých společností, např. Americké akademie umění a věd (1983), Ruské akademie věd (1991), Londýnské matematické společnosti (1992), Maďarské akademie věd (1993), Americké národní akademie věd (1999), Brazilské akademie věd (2000), Academia Europaea (2008), Polské akademie věd (2009) a Londýnské královské společnosti (2009).

12.3 Řád a chaos v dynamických systémech

Pod pojmem dynamický systém chápeme matematický popis a vývoj nějakého fyzikálního systému v čase. Systém má obvykle mnoho přípustných stavů, které tvoří tzv. *fázový prostor*. Cesta ve fázovém prostoru pak popisuje dynamiku uvažovaného systému. Dynamický systém může být čistě deterministický, např. systém diferenciálních rovnic 1. řádu popisující pohyb kyvadla. Ze zadané polohy a rychlosti můžeme jednoznačně vypočítat jeho budoucí stavy. Druhým extrémem je stochastický systém, jehož budoucí vývoj je zcela nejistý, např. házení mincí.

Již od dob Isaaca Newtona používají matematici, fyzici a inženýři diferenciální rovnice, aby vysvětlili rozmanité přírodní jevy a předpověděli, jak se budou vyvíjet v čase. Mnohé z těchto rovnic obsahují též stochastické členy vyjadřující jistou nahodilost. Široké spektrum moderních aplikací deterministických i stochastických evolučních rovnic popisuje pohyby planet, oceánské proudy, fyziologické cykly, populační dynamiku, elektrické obvody aj. Přitom chování některých systémů lze předpovědět s vysokou přesností, zatímco jiné se zdají být chaotické s naprosto nepředvídatelným chováním. Takto je řád a chaos důvěrně spojen. Můžeme najít chaotické chování v deterministických systémech (viz např. [8, s. 202]). Na druhé straně statistická analýza může zase vést k některým definitivním předpovědím (srov. [15]).

U většiny dynamických systémů máme dobrý přehled o tom, co udělá systém na krátkých časových intervalech, zatímco dělat dlouhodobé předpovědi je velice obtížné. Typickým příkladem je problém předpovědi počasí, když máme v pevném čase zadáno rozložení teploty, tlaku, vlhkosti apod., což je bod ve fázovém prostoru. Správná předpověď počasí na 10 minut dopředu je jistě mnohem realističtější než na 10 dní.

V roce 1982 J. Sinaj napsal společně s I. P. Cornfeldem a slavným ruským matematikem S. V. Fominem obsáhlou monografii [3] o ergodické teorii. Sergej Vasiljevič Fomin se bohužel jejího vydání nedožil. Ergodická teorie studuje pohyby v tzv. *měřitelném prostoru* $(M, \mathfrak{S})$, kde M je daný abstraktní prostor a $\mathfrak{S}$ je σ-algebra podmnožin množiny M, tj. neprázdný množinový systém obsahující s každou množinou také její doplněk v M a s každým nejvýše spočetným systémem množin také jeho sjednocení. Na M se obvykle definuje míra μ a pak se uvažuje trojice $(M, \mathfrak{S}, \mu)$, jež se nazývá *prostorem s mírou.*[1] Pokud $\mu(M) = 1$, pak hovoříme o *pravděpodobnostním prostoru* a μ se jmenuje *pravděpodobnostní míra.*

Ergodická teorie se používá k řešení celé řady problémů. Jako příklad uveďme následující užitečné tvrzení z teorie čísel, které lze dokázat právě pomocí ergodické teorie (viz [3, s. 159]). K tomuto účelu nejprve připomeňme, že posloupnost reálných čísel $x_1, x_2, \dots$, $0 \le x_n \le 1$, je *rovnoměrně rozložená* v uzavřeném intervalu $[0, 1]$,

[1]Prostor s mírou (angl. measure space) je tedy speciálním případem měřitelného prostoru (angl. measurable space).

jestliže pro každou spojitou funkci f z prostoru $C([0,1])$ platí následující rovnost

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_j) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

Označme ještě

$$\{x\} = x - [x],$$

kde $[x]$ je celá část reálného čísla x.

Věta. *Nechť $m \geq 1$ a $P(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m$ je polynom s reálnými koeficienty, z nichž alespoň jeden koeficient a_k je iracionální pro $0 \leq k < m$. Pak je posloupnost $x_n = \{P(n)\}$ pro $n = 1, 2, \ldots$ rovnoměrně rozložená v intervalu* $[0,1]$.

Kdyby všechny koeficienty a_k pro $0 \leq k < m$ byly racionální čísla, potom by podobné tvrzení evidentně neplatilo.

Jakov Sinaj učinil mnoho fundamentálních objevů v oblasti dynamických systémů a nalezl překvapivé souvislosti mezi řádem a chaosem (podobně jako desátý laureát Abelovy ceny Endre Szemerédi, viz [7, s. 78]). Podstatně tak obohatil ergodickou teorii,[2] která vyšetřuje tendenci dynamického systému projít všemi svými možnými stavy podle určité časové statistiky. Ve statistické mechanice zase zkoumal chování velkého systému částic (např. molekul v plynu).

První důležitý Sinajův výsledek byl inspirován jeho školitelem Kolmogorovem. Jednalo se o nalezení jistého invariantu dynamického systému, který později dostal jméno *Kolmogorovova–Sinajova entropie.* Tento pojem nyní hraje důležitou roli při studiu složitosti systému pomocí teoretického popisu trajektorií založeného na pojmu míry. Sinaj tak jako první položil základy ke klasifikaci složitosti daného dynamického systému. Kolmogorovova–Sinajova entropie měří nepředvídatelnost chování daného dynamického systému. Čím je nepředvídatelnost systému vyšší, tím je vyšší i jeho entropie.

Pojem Kolmogorovova–Sinajova entropie zobecňuje Shannonovu entropii, známou z teorie informace, kde zpráva je nekonečná posloupnost symbolů z dané abecedy (tj. fázového prostoru). Posun v řetězci

[2]Ergodické teorii se věnovala také Maryam Mirzakhaniová (1977–2017) ze Stanfordovy univerzity (viz [9]), která v roce 2014 jako první žena v historii získala Fieldsovu medaili za matematiku. Byla snachou bývalého předsedy České astronomické společnosti Jana Vondráka.

o jeden symbol vpřed určuje dynamiku systému. Shannonova entropie měří, jaký symbol můžeme předvídat v následujícím kroku. Nepředpověditelnost následujícího symbolu je tak vlastně ekvivalentní nové informaci.

12.4 Entropie binárních posloupností

Uvažujme dynamický systém, jehož stavový prostor se skládá ze všech nekonečných binárních posloupností, tj. posloupností nul a jedniček. Jeho dynamika bude dána operátorem posunutí. Tento systém se nazývá *Bernoulliovo schéma* po velkém matematikovi 17. století Jacobu Bernoulliovi.

Jako konkrétní příklad budeme vyšetřovat následující konečnou binární posloupnost délky 50:

$$11010010001010111011011000101010100011100110100011. \qquad (12.1)$$

Položme si otázku, zda byla posloupnost (12.1) vygenerována náhodně.

Nejprve uveďme několik zjevných skutečností:

1. Uvažovaná posloupnost obsahuje 25 nul a stejný počet jedniček.

2. Na 30 místech se mění 0 na 1 nebo naopak. Na 19 místech je cifra stejná jako na předchozí pozici. Ve zcela náhodné posloupnosti by se tyto počty měly k sobě blížit.

3. Posloupnost (12.1) obsahuje 6 podposloupností tří stejných cifer, ale žádnou podposloupnost čtyř stejných cifer, tj. 0000 nebo 1111. Přitom v náhodně generované binární posloupnosti délky 50 bude existovat podposloupnost se čtyřmi stejnými ciframi s pravděpodobností cca 98 %. Tento fakt naznačuje, že posloupnost (1) patrně nebyla náhodně vygenerována.

Pravda je taková, že posloupnost (12.1) byla vytvořena zkusmo tak, aby vypadala jako náhodná. Jak ale ukazuje předchozí analýza, změna cifer probíhala příliš často.

Pokud vygenerujeme binární posloupnost zcela náhodně,[3] pak výskyt 0 či 1 má zřejmě pravděpodobnost $p = \frac{1}{2}$. V uvažovaném příkladu

[3]Statistické vlastnosti generátorů náhodných čísel jsou například studovány v článku [1].

se skutečně zdá, že výskyt 0 a 1 má stejnou pravděpodobnost. Četnost výskytu dvojic 01 a 10 je 60 %, zatímco jen 40 % připadá na dvojice 00 a 11. Tento rozdíl v předpovědi je kvantifikován v entropii systému. Jak již bylo řečeno, čím je chování systému méně předvídatelné, tím má systém větší entropii. Zcela náhodná binární posloupnost má entropii $\ln 2 = 0.693147\ldots$ Entropie posloupnosti (12.1) je 0.673, což je jen o trochu menší hodnota. Entropie obecného Bernoulliova schématu se dvěma hodnotami s pravděpodobnostmi p a $1-p$ je dána vztahem

$$E = -p \ln p - (1-p)\ln(1-p).$$

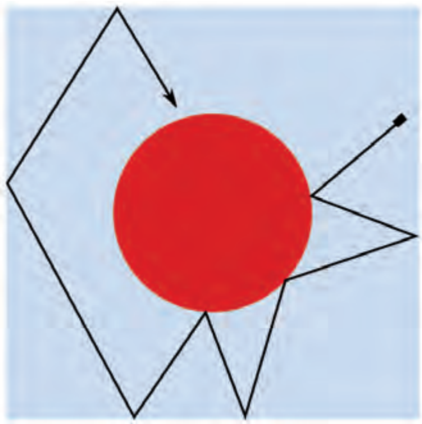
Bernoulliovo schéma může mít více hodnot. Například množina všech nekonečných posloupností z velkých písmen anglické abecedy jich má 26. Známý matematik John von Neumann si kladl záludnou otázku, zda je možné, aby dvě strukturně odlišná Bernoulliova schémata dávala stejné výsledky. Jako příklad uvažujme dvě Bernoulliova schémata $BS(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ a $BS(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, kde zlomek označuje pravděpodobnost výskytu příslušného písmena abecedy v Bernoulliově schématu $BS(\cdots)$.

Problém vyřešil Donald Ornstein [10] v roce 1970. Odpověď na von Neumannovu otázku zní NE, a tedy dvě strukturně různá Bernoulliova schémata dávají odlišné výsledky. Základem pro toto tvrzení[4] je Sinajova a Kolmogorovova idea z roku 1959. Zde je třeba poznamenat, že Kolmogorovova–Sinajova entropie je právě to, co separuje různá Bernoulliova schémata.

12.5 Sinajův kulečník

Dynamický kulečník je matematická idealizace skutečného kulečníku, kde stůl nemusí mít jen obdélníkový tvar a může být navíc vícerozměrný (viz [3, s. 143] pro polyedrické či polytopické oblasti). Přesněji řečeno, příslušný dynamický systém popisuje trajektorii pohybujícího se nehmotného bodu v ohraničené oblasti s hranicí po částech hladkou. Mimo hranici se částice pohybuje přímočaře stále stejnou konstantní rychlostí. Při nárazu na hladkou část hranice se odrazí podle klasického zákona odrazu, kdy úhel odrazu je stejný jako úhel dopadu.

[4] Ornsteinova věta o izomorfismu Bernoulliových automorfismů se stejnou entropií je elegantněji dokázána v monografii [3]. Zde uváděný důkaz se liší od původního Ornsteinova důkazu [10].



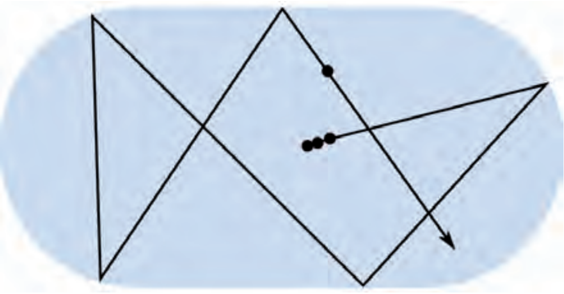
Obr. 12.2 Sinajův kulečník (nakreslila H. Bílková)

Pravděpodobnost dopadu částice na vrchol, hranu apod. je rovna nule. Tento případ je třeba vyšetřovat individuálně (viz [3, s. 138]).

Sinajův kulečník (viz např. [3], [11]) je znázorněn na obr. 12.2. Tento zjednodušený model vznikl při studiu chování molekul ideálního plynu v uzavřené nádobě. Sinaj jej navrhl jako příklad interagujícího hamiltonovského systému, který znázorňuje jisté termodynamické vlastnosti (má kladné Ljapunovovy exponenty a všechny trajektorie jsou ergodické), a proto se mu někdy též říká Lorentzův plyn. Systém má zdánlivě chaotické chování. Pomocí tohoto modelu Sinaj objevil, že chování molekul ideálního plynu se řídí trajektoriemi Hadamardova dynamického systému z článku z roku 1898. To byla první práce, která se systematicky zabývala matematickým chaosem.

Dynamický kulečník lze zobecňovat různými způsoby. Místo rovinného kulečníku můžeme uvažovat i dvojrozměrnou varietu s nenulovou křivostí (např. hemisféru). Přímočaré pohyby nehmotného bodu jsou pak nahrazeny rovnoměrným pohybem podél geodetik, což jsou zhruba řečeno nejkratší spojnice mezi dvěma různými body. Jedná se však stále o deterministický systém, protože trajektorie je jednoznačně určena počáteční polohou a směrem.

V klasickém obdélníkovém kulečníku žádné chaotické chování nenastává. Malá změna počátečních podmínek způsobí podstatnou odchylku v trajektorii na určitém časovém intervalu, kde ale odchylka bude lineární funkcí času. Chaotické chování je však charakterizováno exponenciálním růstem odchylky, což právě Sinajův kulečník splňuje.



Obr. 12.3 Bunimovičův kulečník (nakreslila H. Bílková)

Původně existovala hypotéza, že chaotické chování je způsobeno konkávním tvarem vnitřní hranice (viz obr. 12.2). Pak ale v roce 1979 Leonid Bunimovič [2] dokázal, že pro konvexní kulečník ve tvaru atletického stadionu (viz obr. 12.3) také dostáváme chaotické chování trajektorií.

12.6 Několik poznámek na závěr

Koncem 50. let minulého století organizoval Andrej N. Kolmogorov (1903–1987) na MGU sérii seminářů věnovaných dynamickým systémům. Během nich často padala otázka, zda je možno najít strukturální podobnost dvou různých dynamických systémů. Mladý účastník semináře Jakov Sinaj tehdy vyřešil kladně tento problém pomocí pojmu entropie dynamického systému. I svými dalšími výsledky významně obohatil teorii dynamických systémů. Pomocí pojmu entropie umožnil jejich klasifikaci a lepší chápání jejich složitosti. Jeho manželka Jelena B. Vulová je také matematička a fyzička. Společně napsali několik prací publikovaných v renomovaných mezinárodních časopisech.

Převážná většina Sinajových prací se týká řešení problémů matematické fyziky, Schrödingerovy rovnice, Navierových–Stokesových rovnic, Lorentzova plynu, Markovových procesů, kulečníkových trajektorií, invariantních a Gibbsových měr, stochastických operátorů, diferenciální geometrie, teorie čísel, teorie chaosu, teorie stochastických modelů dynamiky tekutin (srov. též [4]), ergodické teorie a dynamických systémů. Na tato témata napsal několik monografií (viz např. [3], [12], [13]) a přes 200 vědeckých článků, evidovaných databázemi Mathematical Reviews a Zentralblatt für Mathematik.